Corrigé Epreuve 2 Capes Mayotte 2022

Problème 1. Vrai-Faux

1. VRAIE. Pour compter les anagrammes de DENOMBRE on compte d'abord le nombre de choix pour poser les E : $\binom{8}{2}$ et l'on multiplie par le nombre de choix possibles pour ordonner les lettres deux-à-deux distinctes restantes : 6! et l'on obtient donc $\frac{8!}{2}$ choix ce qui donne bien 20160.

2. FAUSSE. Notons S_f, S_h et S les salaires moyens des femmes, des hommes et des employés (femmes et hommes) de l'entreprise. On a $S = \frac{70}{110}S_h + \frac{40}{110}S_f$ et donc $S_f = \frac{11}{4}S - \frac{7}{4}S_h$ et donc $S_f = 1550$. Ainsi on constate que en moyenne le salaire net moyen des femmes est $\geq 70\%$ du salaire net moyen des hommes.

3. VRAIE. Tout produit de 3 entiers naturels consécutifs s'écrit $n(n+1)(n+2)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $n = 3k$, $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$. Si $n = 3k$ alors $3k(3k+1)(3k+2)$ qui est divisible par 3. Si $n = 3k+1$ alors $(3k+1)(3k+2)(3k+3) = 3(3k+1)(3k+2)(k+1)$ qui est divisible par 3. Si $n = 3k+2$ alors $(3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3(3k+2)(k+1)(3k+4)$ qui est divisible par 3.

4. VRAIE. Notons $u_n =$ l'orientation (en terme de cran modulo 12) de la flèche sur l'engrenage A et $v_n =$ l'orientation (en terme de cran modulo 8) de la flèche sur l'engrenage B. On numérote les crans à partir de l'orientation de la flèche de B initialement. Ainsi $u_0 = 3$ et $v_0 = 0$. De plus $u_{n+1} = u_n + 1$ modulo 12 et $v_{n+1} = v_n + 1$ modulo 8. Ainsi, par récurrence immédiate $u_n = n+3$ modulo 12 et $v_n = n$ modulo 8. En particulier $u_n = n + 3 + 12k$ et $v_n = n + 8\ell$ où k et ℓ sont des entiers relatifs. En particulier $u_n - v_n = 3 + 2(6k - 4\ell)$ qui est impair et en particulier jamais nul. Ainsi les flèches ne pourront jamais être alignées.

5. VRAIE. Commençons par remarquer qu'il ne peut y avoir de solutions avec $x = 0$ ou $y = 0$ car -1 n'est divisible ni par 2 ni par 3. Si maintenant $x > 0$ et $y < 0$ alors $3x - 2y \geq 3$ et ne peut donc être égal à -1. Et si $x < 0$ et $y > 0$ alors $3x - 2y \leq -2$ et ne peut donc être égal à -1 non plus.

6. FAUSSE. Remarquons que $4\sin^2(t) - 3 = 0$ équivaut à $\sin(t) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. On voit alors qu'il y a quatre solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

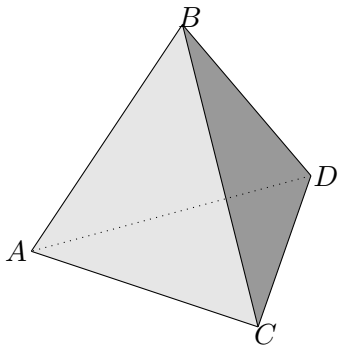
7. FAUSSE. On a $|z'| = 1$ si et seulement si $|z - 3| = |z - (5 - i)|$ si et seulement M (le point d'affixe z) est à égale distance du point A d'affixe 3 et B d'affixe $5 - i$. Ainsi, l'ensemble des M d'affixe z tel que $|z'| = 1$ est la médiatrice du segment $[A, B]$ qui est une droite.

8. VRAIE. Pour que H soit l'orthocentre, il est nécessaire et il suffit que H soit dans deux hauteurs différentes du triangle EFG.

   Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{FG}$: $(2, 2)$ et $(-4, 4)$ et le produit scalaire de ces deux vecteurs fait 0. Ainsi (HE) est orthogonale à (FG) et donc H appartient à la hauteur de EFG issue de E. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{EG}$: $(-4, 2)$ et $(2, 4)$ et le produit scalaire de ces deux vecteurs fait 0. Ainsi (HF) est orthogonale à (EG) et donc H appartient à la hauteur de EFG issue de F.

9. FAUSSE. Remarquons que O l'origine du repère appartient au plan (Q). Si $\overrightarrow{u}$ était un vecteur dans la direction de (Q) alors le point $O + \overrightarrow{u}$ serait dans (Q) mais ses coordonnées sont $(-1, 2, 0)$ qui ne vérifient pas l'équation cartésienne de (Q). Ainsi $\overrightarrow{u}$ n'est pas dans la direction de (Q) et, en particulier ne peut être vecteur directeur de l'intersection de (P) et (Q).

10. VRAIE. Dessinons un tétraèdre régulier et donnons un nom à ses quatre sommets :



Justifions que les arêtes $[A, B]$ et $[C, D]$ sont orthogonales (l'orthogonalité des autres couples d'arêtes se fait de manière identique). Par définition, $AC = a = AD$ et $BC = a = BD$. Ainsi A est dans le plan médiateur de $[C, D]$ et B est dans le plan médiateur de $[C, D]$. On en déduit donc que $\overrightarrow{AB}$ appartient à la direction du plan médiateur de $[C, D]$. Or le plan médiateur est orthogonal à (CD) donc $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CD}$.

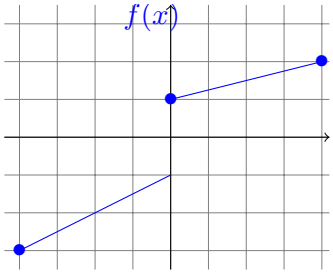
11. FAUSSE. Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. La suite change de signe à tous les termes et ne peut donc être monotone. Par contre $-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ et donc, par théorème d'encadrement, (u_n) tend vers 0. On a donc trouvé une suite convergente non-monotone.

12. FAUSSE. Considérons la suite (v_n) définie par $v_n = (-1)^n n$. Alors $v_{2n} = 2n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, (v_n) ne peut être majorée. Néanmoins $v_{2n+1} = -(2n+1)$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $-\infty$. Ainsi (v_n) ne peut tendre vers $+\infty$.

13. VRAIE. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_{n+1} \leq u_n$.
    - **Initialisation** On a $u_1 = \sqrt{1+u_0} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \leq \sqrt{4} = 2 = u_0$. D'où l'initialisation.
    - **Hérédité** Supposons que l'on ait $u_{n+1} \leq u_n$ pour un certain n alors, puisque $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est croissante comme composée de fonctions croissantes, on en déduit que $\sqrt{1+u_{n+1}} \leq \sqrt{1+u_n}$ et donc $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

    D'où la conclusion par récurrence.

14. FAUSSE. La fonction f suivante est bien strictement croissante sur $[-4, 4]$ vérifie $f(-4) = -3$ et $f(4) = 2$ mais l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.



15. VRAIE. Ré-écrivons u_n,
$$u_n = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^0}{\frac{1}{n} - 0}$$
Remarquons alors que $\frac{e^x - e^0}{x-0}$ tend vers $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ quand x tend vers 0 en reconnaissant le taux d'accroissement de exp en 0. Ainsi, par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

16. VRAIE. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$ alors $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \leq 0$. Ainsi f est concave. En particulier, le graphe de f est en dessous de toutes ses tangentes.

    Notons $y = ax + b$ l'équation cartésienne de la tangente à f en 0. On a $a = f'(0) = 1$ et $f(0) = 1 \times 0 + b$ d'où $b = f(0) = 0$.

    Ainsi dire que f est en dessous de sa tangente en 0 se ré-exprime comme $f(a) \leq a$ pour tout $a > -1$ et donc, en particulier, pour tout $a \geq 0$, $\ln(1+a) \leq a$.

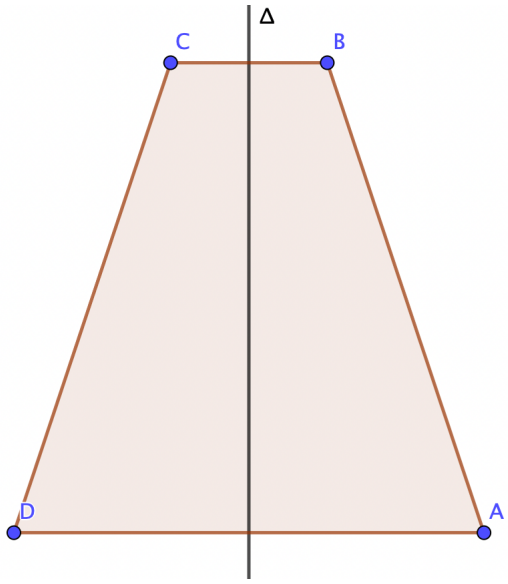
17. VRAIE. On effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{n!}\left([\frac{(1-x)^{n+1}e^{-x}}{n+1}]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-x}dx\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-x}dx\right) \end{aligned}$$

on obtient alors $I_{n+1}+I_n = \frac{1}{(n+1)!}$.

18. FAUSSE. La fonction $y_1 : x \mapsto -\frac{1}{5}$ est clairement solution de l'équation différentielle. De plus $y_2 : x \mapsto e^{5x} - \frac{1}{5}$ est également solution de l'équation différentielle. Par contre, si l'on note $y = y_1 + y_2$ alors $y' - 5y = y_1' - 5y_1 + y_2' - 5y_2 = 1 + 1 = 2 \neq 1$.

19. FAUSSE. Dans le quadrilatère $ABCD$ ci-dessous, on a un axe de symétrie Δ qui envoie une diagonale sur une autre ce qui permet de justifier que les diagonales sont de longueurs égales. Toutefois ce n'est pas un rectangle car (par exemple) $AD \neq BC$.



20. VRAIE. Un calcul des premiers termes des suites (u_n) et (v_n) définies par $\begin{cases} u_0 &= 0.25 \\ v_0 &= 0.75 \\ u_{n+1} &= 0.9u_n + 0.2v_n \\ v_{n+1} &= 1 - u_{n+1} \end{cases}$

donne les valeurs suivantes :

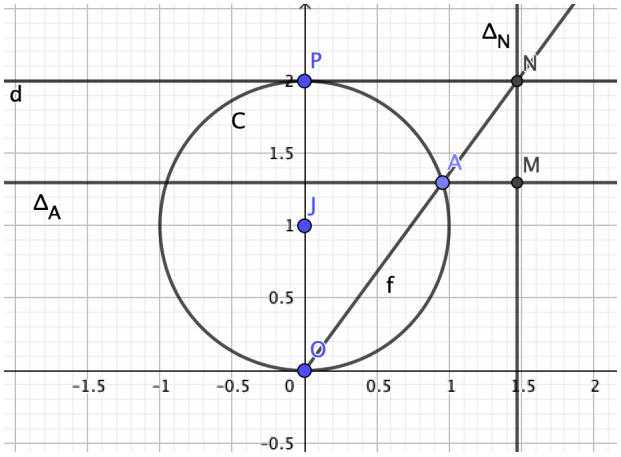
n	u_n	v_n
0	0.25	0.75
1	0.375	0.625
2	0.4625	0.5375
3	0.52375	0.47624999999999995
4	0.566625	0.43337499999999995
5	0.5966375000000002	0.40336249999999985
6	0.6176462500000002	0.3823537499999998

On voit donc que le premier rang à partir duquel u_n dépasse la valeur 0.6 est au rang 6 et donc la valeur renvoyée par Seuil est bien 6.

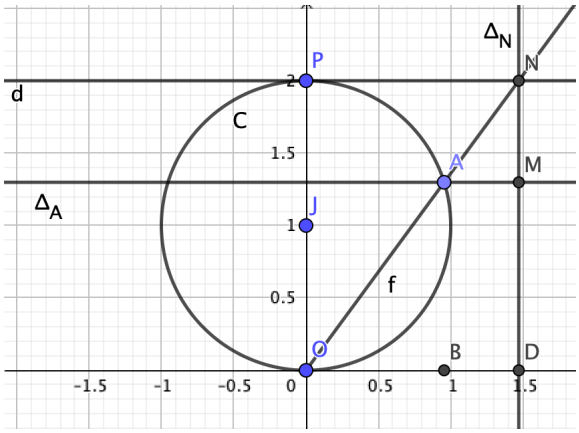
Problème 2. Lieu géométrique, fonction

I Lieu géométrique

On dessine ci-dessous la construction décrite dans l'introduction :



1. Par définition, A est sur le cercle de centre J et de rayon 1. De manière équivalente la distance de A à J est égale à 1, $AJ = 1$ ou encore $AJ^2 = 1$ et donc $(x_A - 0)^2 + (y_A - 1)^2 = 1$ et donc on a $\boxed{x_A^2 + (y_A - 1)^2 = 1}$
2. Notons B le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses et D le projeté orthogonal de N sur l'axe des abscisses :



Les droites (AB) et (ND) sont parallèles (car orthogonales à l'axe des abscisses). Ainsi, en appliquant le théorème de Thalès :

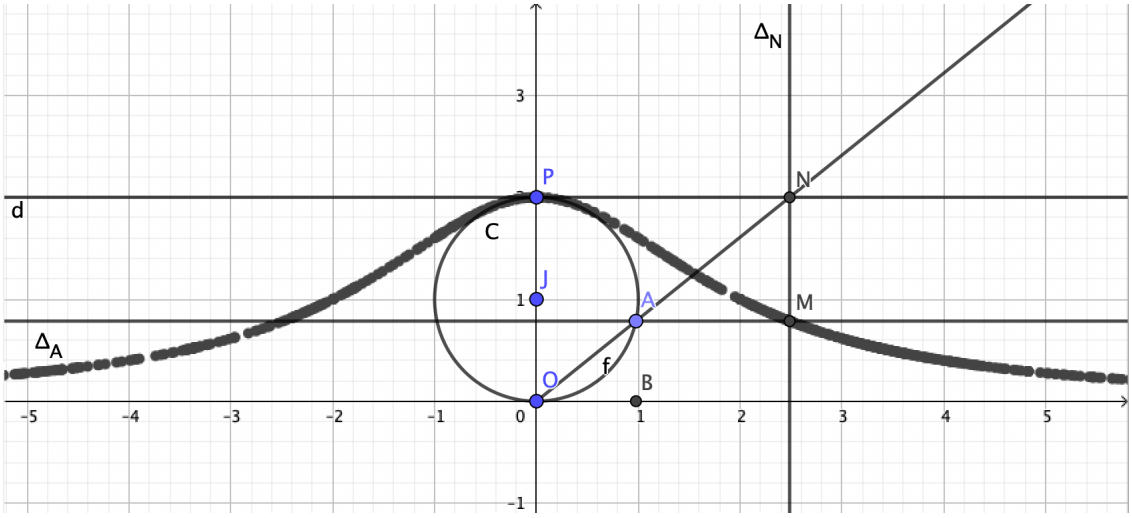
$$\frac{AB}{ND} = \frac{OB}{OD} \text{ et donc } \frac{y_A}{y_N} = \frac{x_A}{x_M}.$$

En remarquant que $y_A = y_M$ par définition de M et $y_N = 2$ par définition de N, on en déduit que $\boxed{y_M x_M = 2x_A}$

3. On a $y_M^2 x_M^2 = 4x_A^2$ en passant l'égalité précédente au carré. Ensuite, on remarque que, avec la question 1, $x_A^2 = 1 - (y_A - 1)^2 = 2y_A - y_A^2$. Ainsi $y_M^2 x_M^2 = 8y_A - 4y_A^2$ et donc $\boxed{x_M^2 y_M^2 + 4y_M^2 - 8y_M = 0}$

Ensuite, on factorise par y_M : $y_M(x_M^2 y_M + 4y_M - 8) = 0$ remarquons que $y_M = 0$ équivaut à $y_A = 0$ or ceci est impossible car $A \neq O$ donc $y_M \neq 0$ et donc on peut diviser par y_M l'équation précédente pour en déduire $x_M^2 y_M + 4y_M - 8 = 0$ ou encore $y_M(x_M^2 + 4) = 8$ et donc $\boxed{y_M = \frac{8}{x_M^2+4}}$

On trouvera ci-dessous en noir la "sorcière d'Agnési" évoquée dans le sujet :



II Étude de fonction

1. f est un quotient de polynômes. De plus le dénominateur $x \mapsto x^2+4$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas. On en déduit que $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$ De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{8}{(-x)^2+4} = \frac{8}{x^2+4} = f(x)$$

et donc $\boxed{f \text{ est une fonction paire}}$

2. On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2+4 = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^+$. Par conséquent

$$\boxed{\text{l'unique asymptote de } f \text{ en } \pm\infty \text{ est l'axe des abscisses}}$$

3. La fonction f étant quotient de fonctions dérivables strictement positives est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 8 \times 2x \times \left(-\frac{1}{(x^2+4)^2}\right) = -\frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

on en déduit le tableau de signe de f puis le tableau de variations de f :

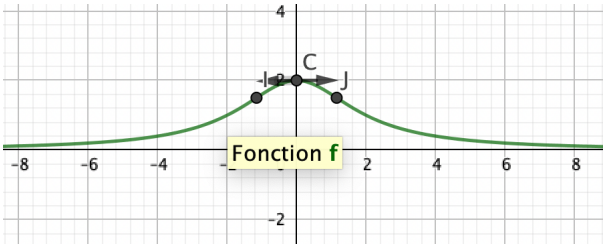
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

4. Dérivons une seconde fois la fonction f, on obtient alors :

$$f''(x) = -\frac{16}{(x^2+4)^2} + \frac{32x \times 2x}{(x^2+4)^3} = \frac{64x^2-16x^2-64}{(x^2+4)^3} = \frac{48x^2-64}{(x^2+4)^3} = 16 \times \frac{3x^2-4}{(x^2+4)^3}$$

On remarque donc que $3x^2-4 \geq 0$ si et seulement si $x \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $x \leq -\frac{2}{\sqrt{3}}$. Ainsi $\boxed{f \text{ est concave sur } \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right] \text{ et convexe sur le reste de l'intervalle}}$

5. Dessinons le graphe de f avec les deux points d'inflexions I et J :



6. Il s'agit de calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Puisque f est paire, on commence par calculer $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$. Soit $s > 0$, on a

$$\int_0^s f(x)dx = \int_0^s \frac{8}{x^2+4}dx = \int_0^s \frac{2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx$$

on applique en suite le changement de variable $y = \frac{x}{2}$, $2dy = dx$ et donc :

$$\int_0^s f(x)dx = \int_0^{2s} \frac{1}{y^2+1}dy = [\arctan(x)]_0^{2s} = \arctan(2s) - \arctan(0) = \arctan(2s).$$

Puisque $\lim\limits_{s\to+\infty} \arctan(2s) = \frac{\pi}{2}$ on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et que $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, par parité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2 \times \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

et donc $\boxed{\text{l'aire recherchée est } \pi}$

Problème 3. Suites

1. Étude de la suite (u_n)

   (a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[k, k+1]$, ainsi pour tout $x \in [k, k+1]$, on a
   $$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$
   et en intégrant entre k et $k+1$, on obtient :
   $$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}}$$

   (b) On a
   $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc, par comparaison, $\boxed{(u_n) \text{ diverge vers } +\infty}$

2. Étude de la suite (v_n)

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ et $\boxed{(v_n) \text{ est donc croissante}}$

   (b) Montrons par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
   — **Initialisation** On a $v_1 = 1 = 2 - \frac{1}{1}$ d'où $v_1 \leq 2 - \frac{1}{1}$.
   — **Hérédité** Supposons $v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ pour un certain n. On a alors
   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 2 + \frac{n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} \\ &= 2 - \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)^2} \\ &\leq 2 - \frac{n^2 + n}{n(n+1)^2} \\ &= 2 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{D'où la conclusion par récurrence}}$

   (c) D'après la question (a) la suite (v_n) est croissante, en utilisant la question (b), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ donc (v_n) est majorée. Ainsi, en appliquant le théorème de la convergence monotone, $\boxed{(v_n) \text{ est convergente}}$

   (d) Ci-dessous un script en Python :

```
v=0
for k in range(1,1001):
    v=v+1/k**2
print(v)
```

   (e) Remarquons que
   $$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - v_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n}$$

Ainsi $0 \leq \left|\frac{\pi^2}{6} - v_{1000}\right| \leq \frac{1}{1000}$ et donc $0 \leq \left|\pi^2 - 6v_{1000}\right| \leq \frac{6}{1000}$. En remarquant que $\sqrt{\cdot}$ est $\frac{1}{2}$-lipschtizienne sur $[1, +\infty[$, on en déduit que

$$\pi - \sqrt{6v_{1000}} \leq \frac{1}{2}(\pi^2 - 6v_{1000}) \leq \frac{3}{1000} \leq \frac{1}{100}$$

Ainsi $\boxed{\text{on obtient les deux premières décimales de } \pi \text{ avec ce calcul}}$

3. Étude de la suite (w_n)

   (a) Remarquons d'abord que $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$ donc (w_n) est croissante. De plus, puisque pour $k \geq 1$, $\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$. Par suite, $w_n \leq v_n$. Puisque v_n est croissante, $v_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{\pi^2}{6}$. Ainsi $w_n \leq \frac{\pi^2}{6}$ et donc (w_n) est majorée. Puisque (w_n) est croissante et majorée, le théorème de convergence monotone assure que $\boxed{(w_n) \text{ converge}}$

   (b) Dire que la constante $\zeta(3)$ est irrationnelle, c'est dire que

   $$\boxed{\text{on ne peut écrire } \zeta(3) = \tfrac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^*}$$

   (c) On constate que $\beta < \zeta(3)$. Ainsi on va chercher le rang auquel on dépasse β. Ci-dessous le script en Python :

```
beta=1.20205690198
v=0
k=1
while v<beta:
    v=v+1/k**3
    k=k+1
print(k)
```

   la boucle while s'arrêtera quand la suite aura dépassé cette valeur. En particulier, cela montrera que la suite (w_n) ne converge pas vers β. *Le rang affiché est* 20589

Problème 4. Moyennes

1. (a) Le cycliste va monter les $10km$ à $10km/h$ en 1 heure. Puis va être trois fois plus rapide au retour. Il parcourt donc les $10km$ en descente en 20 minutes. Il parcourt donc $20km$ en $1h20$ ou encore en 80 minutes. Ainsi il parcourt en moyenne $1km$ en 4 minutes ou encore $15km$ en 60 minutes. Ainsi $\boxed{\text{sa vitesse moyenne est de } 15km/h}$

   (b) Le cycliste parcourt $20km$ au total. Calculons la durée de la montée et la durée de la descente. La durée de la montée est donnée par $10/x$ en heure et la durée de la descente est donnée par $10/y$. Ainsi la vitesse moyenne (en km/h) est donnée par : $\frac{20}{\frac{10}{x}+\frac{10}{y}} = \boxed{\frac{2xy}{x+y}}$

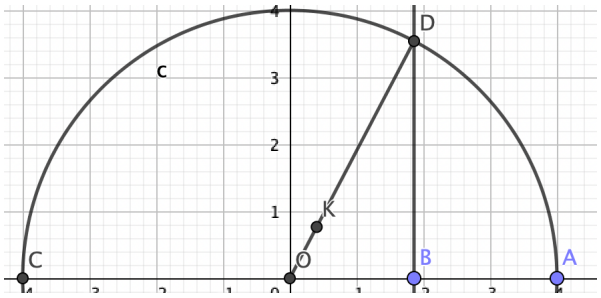
2. (a) Le périmètre du rectangle est donné par $2(x+y)$ et le périmètre du carré est donné par $4c$. Ainsi, le carré et le rectangle ont le même périmètre si $\boxed{c = \frac{x+y}{2}}$

   (b) L'aire du rectangle est donnée par $x \times y$ et l'aire du carré est donnée par c^2. Ainsi, le carré et le rectangle ont la même aire si $\boxed{c = \sqrt{x \times y}}$

   (c) À l'aide du théorème de Pythagore, les diagonales du rectangle sont de longueur $\sqrt{x^2+y^2}$. À l'aide du théorème de Pythagore, les diagonales du carré sont de longueur $\sqrt{c^2+c^2} = \sqrt{2c^2} = \sqrt{2}c$. Ainsi, le carré et le rectangle ont la même longueur de diagonale si $\boxed{c = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}}$

   (d) On veut donc $\frac{xy}{c^2} = \frac{2(x+y)}{4c}$ ou encore $\frac{xy}{c} = \frac{x+y}{2}$ ou encore $\boxed{c = \frac{2xy}{x+y}}$

3. On dessine la construction décrite :



   — Puisque OD est un rayon du cercle de diamètre $AC = x+y$, on en déduit que $\boxed{OD = \frac{x+y}{2}}$

   — Remarquons que puisque $x < y$, B est à droite de O et donc $OB = OA - AB = \frac{x+y}{2} - x = \frac{y-x}{2}$. Ensuite en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OBD rectangle en B, on obtient $OD^2 = OB^2 + BD^2$ et donc $BD = \sqrt{OD^2 - OB^2} = \sqrt{\frac{x^2+2xy+y^2}{4} - \frac{x^2-2xy+y^2}{4}} = \boxed{\sqrt{xy}}$

   — En faisant de la trigonométrie dans le triangle KBD rectangle en K, $\cos(\widehat{KDB}) = \frac{KD}{DB}$. En faisant de la trigonométrie dans le triangle OBD rectangle en B, $\cos(\widehat{KDB}) = \frac{BD}{OD}$. Ainsi $\frac{BD}{OD} = \frac{KD}{DB}$ et donc

$$KD = \frac{DB^2}{OD} = \frac{xy}{\frac{x+y}{2}}$$

   D'où $\boxed{KD = \frac{2xy}{x+y}}$

4. (a) Puisque $x, y > 0$, $x+y > 0$ et donc $\boxed{a = \frac{x+y}{2} > 0}$. Puisque g et q sont des racines carrées, $\boxed{g, q > 0}$ Enfin, $2xy > 0$ et $x+y > 0$ donc $\boxed{h = \frac{2xy}{x+y} > 0}$

   (b) Avec un calcul direct $a^2 - g^2 = \frac{x^2+2xy+y^2}{4} - xy = \frac{x^2-2xy+y^2}{4} = \boxed{\frac{(x-y)^2}{4}}$

   (c) On a $ah = \frac{x+y}{2}\frac{2xy}{x+y} = xy = g^2$. D'où $\boxed{g = \sqrt{ah}}$

(d) On le voit directement avec un calcul : $\boxed{\ln(h) = \ln(\sqrt{xy}) = \frac{1}{2}(\ln(x) + \ln(y))}$

5. — Puisque $y > x$, $2y > y + x$ et donc $1 < \frac{2y}{x+y}$ d'où en multipliant par x, $\boxed{x < h}$
   — Avec la question 4 (b), on remarque que $a^2 - g^2 > 0$ et donc $a^2 > g^2$ et donc (puisque $a, g > 0$) $\boxed{a > g}$
   — On a $\frac{g}{h} = \frac{x+y}{2\sqrt{xy}} = \frac{a}{g} > 1$ avec ce qui précède donc $\boxed{g > h}$
   — Calculons $q^2 - a^2 = \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{x^2+2xy+y^2}{4} = \frac{x^2-2xy+y^2}{4} = \frac{(x-y)^2}{4} > 0$. Ainsi $q^2 > a^2$ et donc $\boxed{q > a}$
   — Finalement $\frac{x^2+y^2}{2} < \frac{y^2+y^2}{2} = y^2$ et donc en passant à la racine carrée $\boxed{q < \sqrt{y^2} = y}$

6. (a) Supposons que (u_n) soit arithmétique de raison r. Alors $u_{k+1} = u_k + r$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a donc $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_{n-1} = u_n - r$. Ainsi en sommant ces deux égalités, on obtient $2u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$ et donc $\boxed{u_n = \frac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2}}$

   (b) Supposons que (u_n) soit géométrique de raison q. Alors $u_{k+1} = q \times u_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a donc $u_{n+1} = u_n \times q$ et $u_{n-1} = u_n \times \frac{1}{q}$. Ainsi en multipliant ces deux égalités, on obtient $u_n^2 = u_{n+1} \times u_{n-1}$ et donc $\boxed{u_n = \sqrt{u_{n+1}u_{n-1}}}$